TRAVAIL D'ÉTÉ EN MATHÉMATIQUES

Classe de 1reS - Passage en terminale ES **Année scolaire: 2017-2018**

Exercice 1

Répondre par **Vrai** ou **Faux** en **justifiant**.

1. Le prix d'un article augmente de 10% puis baisse de 10% alors le prix final est égal au prix initial.
2. Dans une ville sur deux années consécutives, le taux d'augmentation de la population a été de 5% puis de 7%. Alors la population a augmenté de 12%.
3. Une grandeur positive augmente de 25%. Alors le pourcentage d'évolution réciproque à cette augmentation est égal à 20%.
4. Pour une augmentation de 200%, le coefficient multiplicateur est égale à 2.

Exercice 2

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+6x+4}{-x^2-4x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} 2x-1+\frac{1}{-x+3}.$$

2. Calculer la dérivée des fonctions f et g après avoir déterminé le domaine de dérivabilité :

$$f(x)=\frac{2x-1}{-x+4} \quad ; \quad g(x)=2x^4+\sqrt{x}-\frac{5}{x}\ .$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+3$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Trouver le point A de (C) où la tangente est horizontale.
2) Trouver le point B de (C) où la tangente est parallèle à la droite (D) d'équation $2x+y-2016=0$.
3) Trouver le point E de (C) où la tangente passe par I(1 ; 4) et J(2 ; 2).

Exercice 4

Les parties A et B sont indépendantes.

A) On considère la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pose $V_n = U_n - 6$ pour tout n.

1) Calculer U_1 et U_2.
2) Montrer que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
3) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme V_0.
4) Calculer V_n puis U_n en fonction de n.
5) Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$ et en déduire $T_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ en fonction de n.

B) (U_n) est une suite arithmétique de raison r et S_n la somme de ses n premiers termes. Sachant que $U_3 = 5$ et $S_5 = 15$, calculer r et U_0.

Exercice 5

Une entreprise qui fabrique des vases fait une étude sur une production comprise entre 0 et 50 vases. Le coût total, en milliers de L.L. de x vases fabriqués est donné par :

$C_T(x) = x^2 + 30x + 400$ pour $x \in [0 ; 50]$

1) Calculer les coûts fixes.
2) Quel est le coût de fabrication de 20 vases ?
3) Chaque vase est vendu à 80 000 L.L.
   a) Exprimer, en fonction de x, le prix de vente V(x) réalisé lorsque l'entreprise vend x vases.
   b) Exprimer en fonction de x, le profit P(x).
   c) Etudier selon les valeurs de x, le signe de P(x) et trouver la quantité qu'il faut produire pour que l'entreprise gagne.

Exercice 6

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie sur D= $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$.

Ecrire f sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ où a, b et c sont des réels à déterminer.

1) Calculer les limites de f aux bornes de D. Que peut-on en déduire ?
2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 3$ est une asymptote oblique à (C).
5) Etudier la position de (C) et (Δ).

Tracer (C) et (Δ) dans un repère orthonormé.

Exercice 7

Un atelier réalise le polissage de lentilles. À la sortie du robot de polissage, on classe les lentilles suivant deux catégories: A: « haute qualité » et B: « qualité moyenne » .
On contrôle la production en prélevant au hasard des échantillons de 80 lentilles.
La production est suffisamment importante pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise.
On suppose que la proportion de lentilles de type B est p = 15%.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lentilles de type B sur un échantillon de taille 80.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Utiliser l'extrait ci-dessous de la table des probabilités cumulées pour déterminer l'intervalle de fluctuation I à 95%.

k	$P(X \leq k)$
5	0,014
6	0,0345
7	0,0727
8	0,1342
17	0,9520
18	0,9741
19	0,9868
20	0,9937

3. Quelle est la probabilité de commettre une erreur de décision à partir d'un échantillon ?

Exercice 8

Une urne contient une boule rouge et n boules blanches, n≥1. Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

On prélève au hasard une boule de l'urne : si c'est la rouge on gagne 10€ ; si c'est une blanche on perd 1€.
On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique après prélèvement d'une boule.

1) On suppose, dans cette question, que n = 10.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2) Dans cette question, n≥1.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X et exprimer E(X) en fonction de n.
   b) Pour quelles valeurs de n, a-t-on E(X) ≥0 ?
   c) Calculer n pour avoir E(X) = $-\frac{1}{2}$.

Partie B

On suppose, dans cette question, que n = 9.
On prélève au hasard une boule de l'urne, on la remet dans l'urne et on recommence <u>10 fois</u>.
Soit R la variable aléatoire associée au nombre de boules rouges obtenues.

1) Quelle loi de probabilité suit R ?
2) Calculer E(R) et interpréter le résultat.
3) Calculer la probabilité d'avoir 4 boules rouges uniquement.
4) Calculer la probabilité d'avoir au plus 2 boules rouges.
5) Calculer la probabilité d'avoir au moins 2 boules rouges.

Exercice 9

Une entreprise fabrique et vend une quantité x d'objets. La capacité maximale de production de l'entreprise est de 21 objets. Le coût total de fabrication de x objets, exprimé en dollars, est donné par :

$C(x) = 2x^3 - 54x^2 + 470x + 80$. Chaque objet est vendu à 200$.

1) R(x) et B(x) désignent respectivement la recette et le profit pour x objets vendus.

   a) Exprimer R(x) en fonction de x.

   b) Montrer que le profit pour x objets vendus est :

      $P(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$.

2) On considère la fonction P définie sur l'intervalle [0 ;21] par :

   $P(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$.

   a) Calculer P'(x) et vérifier que $P'(x) = -6(x-3)(x-15)$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction P.

   c) Pour quel nombre d'objets fabriqués et vendus le profit est-il maximal ?

Exercice 10

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on considère la représentation graphique (C) de la fonction f définie par, $f(x)=\frac{x^2+bx+c}{x+a}$ avec *a*,*b* et *c* réels.

1) Déterminer *a, b* et *c* sachant que la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote à (C) et que la tangente au point A(- 3 ; - 5) de (C) est horizontale.
2) Dans la suite du problème on prendra $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$.
   a) Trouver le domaine de définition de f.
   b) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition.
   c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.
   d) Etudier les variations de f et tracer (C).
   e) Ecrire une équation de la tangente à (C) en son point d'abscisse -1.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 3x - 3$ et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Démontrer que h(x)=0 admet une racine unique $\alpha \in [0; 1]$.
2) Trouver deux points de (C_h) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 6x + 1$.

Exercice 11

Les parties A et B sont indépendantes:

Les algorithmes seront fait en langage naturel.

Partie A

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$.

1) Ecrire un algorithme permettant d' afficher les dix premiers termes de cette suite et leur somme.
2) Ecrire un algorithme permettant d'afficher le rang du premier terme de la suite (U_n) inférieur à -10^6.

Partie B

Jacques a placé une somme de 20 000$ à un taux d'intérêt annuel de 7% en 2016

1) Ecrire un algorithme permettant de déterminer la somme obtenue après 10 ans.
2) Ecrire un algorithme permettant de déterminer en quelle année la somme doublera.

Exercice 12

Une entreprise produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en un mètre de large et pour une longueur x exprimée en Kilomètres (x compris entre 0 et 10). Le coût total de production en euros est donné par :

$C(x)= 15x^3 – 120x^2 + 500x +750$.

Partie A : Etude du bénéfice

Si le marché propose un prix p en euros pour un Kilomètre de ce tissu, alors la recette de cette entreprise pour la vente d'une quantité x est : $R(x) = px$.

On suppose dans cette question que le prix du marché est égal à 680€.

1) Justifier que le bénéfice réalisé par l'entreprise est :
   $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x – 750$.
2) Etudier les variations de la fonction B sur [0 ;10].
   En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise est maximum.
   Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Etude du coût moyen

On considère la fonction C_M définie sur]0 ;10] par : $C_M(x)=\frac{C(x)}{x}$.

1) Calculer $C'_M(x)$ puis démontrer que pour tout $x \in]0; 10]$, $C'_M(x)=\frac{30\,(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$.
2) Démontrer que pour tout $x \in]0; 10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$. En déduire les variations de la fonction C_M.

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par : $f(x) = x-3 + \frac{4}{x+2}$. ($C_f$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Calculer les limites aux bornes de son domaine de définition.
2) Démontrer que (C_f) admet deux asymptotes.
3) Etudier les variations de f.
4) Etudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.
5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -1.
6) Tracer la courbe (C_f).
7) Existe-t-il des points de (C_f) où la tangente est parallèle à la droite (D) d'équation y=x-3 ?

Exercice 14

Une urne contient six boules blanches et n boules rouges (n entier tel que $n \geq 2$).

Un joueur trie au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2€ et pour chaque boule rouge il perd 3€. Soit G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur.

1) Exprimer en fonction de n, le nombre d'issues possibles.
2) Quelles sont les valeurs prises pour G ?
3) Que signifie l'évènement G= -1 ? En déduire que $p(G= -1) = \frac{12n}{(n+6)(n+5)}$.
4) Déterminer la loi de probabilité de G.
5) Calculer l'espérance mathématique de G.

Exercice 15

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Le père de Ryan a déposé le premier Février 2000, une somme de 25 000$ sur le compte de son fils. A la fin de chaque année, la somme augmentera de 5% annuel et une diminution de 2000$ que Ryan va retirer.
Ecrire un algorithme qui permet d'afficher en quelle année la somme sera inférieure à 5000$?

B) Ecrire un algorithme permettant de calculer la somme S suivante :
$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{9}{10}$.

Exercice 16

Pour savoir si une pièce est équilibrée, on la lance 200 fois.
On a obtenu 115 fois "Pile".
Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de "Pile" apparu
On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

a) Déterminer n et p .
b) Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau ci-contre:
(Donner les résultats à 10^{-4} près par défaut)
c) Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des "Piles" apparus puis déduire si la pièce est équilibrée ou non.

k	$P(X \leq k)$
84	
85	0,0200
86	0,0279
87	0,0384
88	0,0518
89	
90	
111	
112	0,9615
113	0,9720
114	0,9799
115	0,9859
116	
117	