



TRAVAIL D'ÉTÉ EN MATHÉMATIQUES

Classe de IreS - Passage en terminale

Année scolaire: 2017-2018

Exercice 1

Soit $f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3$ où m est un paramètre réel ($m \neq 2$).

On note x' et x'' les racines de $f(x)$, lorsqu'elles existent.

1. Etudier le signe de $-4m^2 + 28m - 24$.
2. Pour quelles valeurs de m , les racines x' et x'' existent-elles ?
3. Déterminer m pour que 4 soit racine de $f(x)$ et calculer l'autre racine.
4. Déterminer m , dans chacun des cas suivants :
 - a) Les racines x' et x'' sont opposées.
 - b) $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = +2$.

Exercice 2

1. a) Résoudre l'équation $2t^2 + 9t - 5 = 0$.
 b) En déduire les solutions de l'équation $2|x-2|^2 + 9|x-2| - 5 = 0$.
2. Résoudre les inéquations suivantes :
 - a) $\frac{2x^2 - 5x + 3}{-x^2 - 4x - 3} \geq 0$.
 - b) $-y^2 + 5|y| - 4 \leq 0$.
3. Soit $E = \frac{2x^2 - 5x + 3}{-3x^2 - x + 4}$. Simplifier E .

Exercice 3

On considère dans un repère orthonormé la famille de courbes (C_m) d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2(2m+1)x + 2(m-3)y + 5 - 2m = 0.$$

- 1) Démontrer que, quelque soit m , (C_m) est un cercle de centre $I_m(2m+1 ; -m+3)$ dont on déterminera le rayon R_m .
- 2) Déterminer l'ensemble des centres I_m .
- 3) Montrer que les points $E(0 ; 1)$ et $F(2 ; 5)$ appartiennent à (C_m) et **retrouver** l'ensemble des centres I_m .
- 4) Trouver l'ensemble des valeurs de m tel que (C_m) coupe $(x'Ox)$ en deux points distincts.
- 5) Soit $A(2 ; -5)$. Montrer que A est un point à l'extérieur du cercle (C_1) et trouver les équations des tangentes menées de A à (C_1) .
- 6) Calculer l'angle aigu (arrondi au degré) de ces deux tangentes.
- 7) Trouver les équations des tangentes à (C_1) qui sont parallèles à la droite (D) d'équation $x-y+1=0$.

Exercice 4

- Soit $h(x) = (m+2)x^2 - 2mx + m - 5$ où m est un paramètre réel ($m \neq -2$).
 - Déterminer m pour que $\frac{3}{2}$ soit racine de $h(x)$ puis déduire l'autre racine.
 - Déduire les racines du trinôme: $4x^2 - 4x - 3$, puis dresser son tableau de signes.
- Résoudre l'équation: $4|2x-3|^2 - 4|2x-3| - 3 = 0$.
- Déterminer le domaine de définition de la fonction k définie par: $k(x) = \sqrt{4\sin^2 2x - 4\sin 2x - 3}$.

Exercice 5

- Résoudre dans \mathbf{R} puis dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ l'équation: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos(2x) = 0$.
- Résoudre dans \mathbf{R} puis dans l'intervalle $]0; 2\pi]$ l'inéquation: $-2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \geq 0$.

Exercice 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R} - \{-2; 3\}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On donne le tableau suivant concernant f :

x	$-\infty$	-2	0	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	—		—	○	+		—
Variations de f	-2 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 1	1 ↗ $+\infty$		$+\infty$ ↘ 2	2 ↘ $-\infty$

- Déterminer les limites de f aux bornes ouvertes de son domaine de définition puis déduire les asymptotes verticales et horizontale de (C) .
- Sachant que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x + 2 = 0$, déterminer l'équation de l'asymptote oblique (d) à (C) en $+\infty$.
- Sachant que (d) coupe (C) en son point d'abscisse 7 et en respectant toutes les informations déjà données, tracer les asymptotes et une courbe possible de f .

Exercice 7

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ et (C_f) sa courbe représentative.

- Déterminer les limites de f aux bornes ouvertes de son domaine de définition D_f et interpréter graphiquement les résultats.
- Vérifier que $f(x) = x - 2 - \frac{2x}{x^2 - 1}$.
 - Démontrer que la droite $(d): y = x - 2$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Étudier la position de (C_f) par rapport à (d) .

3) a) Montrer que $f'(x) > 0$ sur D_f puis dresser le tableau de variations de f .

b) Ecrire l'équation de la droite (T) tangente à (C_f) en son point d'abscisse 2.

c) Dédire les coordonnées du point de tangence B où la tangente à (C_f) est parallèle à (T) .

d) Donner une approximation affine de $f(2 - 10^{-2})$. Quelle est l'erreur commise.?

4) Soit g la fonction définie par: $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{|x+1|(1-x)}$ et (C_g) sa courbe représentative.

Expliquer, sans faire aucune figure, comment déduire (C_g) à partir de (C_f) .

Exercice 8

Soit, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la famille de courbes (C_m) d'équation:

$$x^2 + y^2 - 2mx + 2(m+1)y + m^2 - 2m - 2 = 0 \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1) Déterminer m pour que (C_m) soit un cercle.

2) Calculer m pour que le cercle (C_m) soit tangent à la droite (T) d'équation: $4x + 3y + 3 = 0$.

Dans la suite, on suppose que $m = 1$, alors: $(C_1): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$.

3) Déterminer le centre I_1 et le rayon R_1 du cercle (C_1) .

4) Déterminer l'équation de la droite (Δ) passant par $A(3;0)$ et tangente à (C_1) .

5) a) Déterminer les équations des tangentes (T_1) et (T_2) au cercle (C_1) et perpendiculaires à la droite (Δ) . (L'ordonnée à l'origine de (T_1) est la plus petite des deux).

b) Dédire les coordonnées du point de tangence B de (T_1) et (C_1) .

Exercice 9

Soit (U_n) et (V_n) deux suites numériques telles que:

- (V_n) est géométrique de raison 3 de premier terme $V_1 = 3$.
- $V_n = 1 - \frac{1}{U_n - 1}$ avec $U_n \neq 1$ pour tout entier naturel n .

Soit les sommes $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ et $T_n = \frac{1}{U_1 - 1} + \frac{1}{U_2 - 1} + \dots + \frac{1}{U_n - 1}$.

Ecrire S_n puis déduire T_n en fonction de n .

Exercice 10

Pour savoir si une pièce est équilibrée, on la lance 200 fois.

On a obtenu 115 fois "Pile".

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de "Pile" apparu

On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

a) Déterminer n et p .

b) Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau ci-contre:

(Donner les résultats à 10^{-4} près par défaut)

c) Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des "Piles" apparus puis déduire si la pièce est équilibrée ou non.

k	$P(X \leq k)$
84	
85	0,0200
86	0,0279
87	0,0384
88	0,0518
89	
90	
111	
112	0,9615
113	0,9720
114	0,9799
115	0,9859
116	
117	

Exercice 11

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{9}{5}$ et telle que pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = \frac{-2}{U_n - 3}.$$

On admet que pour tout entier naturel n , $1 < U_n < 2$.

Partie A

1) Calculer U_1 et U_2 puis compléter le tableau à l'aide de la calculatrice,

(on prendra des valeurs de la suite (U_n) arrondies à 10^{-4} près)

i	3	4	5	6	8	11	13	14	16	17
U_i										

d'après le tableau ci-dessus:

2) a) Conjecturer les variations de la suite (U_n) .

b) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n - 1)(U_n - 2)}{U_n - 3}$ puis démontrer votre conjecture.

3) Conjecturer le comportement de la suite (U_n) à l'infini.

Partie B

1) Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n , par $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n - 1}$.

2) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme V_0 .

- 3) a) Exprimer, pour tout entier naturel n , V_n en fonction de n puis déduire que $U_n = 1 + \frac{1}{1+(2)^{n-2}}$.
- b) Déduire que (U_n) est une suite convergente.
- c) Trouver le plus petit indice " m " tel que , lorsque $n \geq m$, on a: $U_n \leq 1 + \frac{1}{1025}$.

Exercice 12

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on donne le point $S(-3;4)$ et le cercle (C)

d'équation: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

- 1) Déterminer les coordonnées du centre I et le rayon R de (C).
- 2) Montrer que le point S est à l'extérieur du cercle (C).
- 3) Montrer que le cercle (C') de diamètre $[IS]$ a pour équation: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$.
- 4) Calculer les coordonnées des points A et B intersection des deux cercles (C) et (C').
- 5) Déterminer les équations des droites (T_1) et (T_2) tangentes à (C) et passant par le point S.

Exercice 13

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

les deux points $A(0 ; 4 ; 1)$ et $B(2 ; -1 ; -2)$, le vecteur $\vec{u}(1; -1; -1)$ et la droite (Δ)

de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2m + 7 \\ y = -m - 1 \\ z = 3m + 4 \end{cases} \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1. Soit (d) la droite passant par le point A et de vecteur directeur \vec{u} .
 - a. Démontrer que les droites (d) et (Δ) sont orthogonales.
 - b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite(d).
2. Soit (P) le plan qui passe par le point A et perpendiculaire à la droite (Δ).
 - a. Démontrer que le plan (P) a pour équation : $2x - y + 3z + 1 = 0$.
 - b. Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan(P).
 - c. Démontrer que la droite (d) est incluse dans le plan (P).
 - d. Déduire que les droites (d) et(Δ) sont sécantes.
3. Soit (P_1) le plan d'équation : $x + z + 1 = 0$.
 - a. Montrer que les plans(P) et (P_1) sont sécants.
 - b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite(d_1) intersection des plans (P) et (P_1).

Exercice 14

Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$. On note (G) son graphe dans un repère orthonormé(O, \vec{i}, \vec{j}).

1. a. Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans R comprise entre 1.67 et 1.68.
b. En déduire le signe de g sur R .
2. La droite d'équation $y = 12x - 21$ est- elle une tangente à (G) ?
Si oui préciser en quels points.
3. a. Vérifier que $1 + x^3 = (1 + x)(x^2 - x + 1)$.
b. En déduire que $1 + x^3 = 0$ admet une solution et une seule sur R .

4. Soit f la fonction définie sur $] - 1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$; on note (C) son graphe.
- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Déduire les équations des asymptotes.
5. a. Démontrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$
- En déduire le tableau de variation de f . (on donnera une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2}).

Exercice 15

Une urne contient 7 boules noires et 3 boules blanches. Les boules sont indiscernables.

Une partie consiste à tirer au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne.

On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
 - un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
 - un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.
- Un joueur joue une partie. On note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
 - Montrer que $p(Y = -1) = 0,49$.
 - Établir la loi de probabilité de Y .
 - Un joueur joue 10 parties identiques et indépendantes. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de parties gagnées par le joueur.
 - Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,42$.
 - Calculer $p(X = 0)$, $p(X \geq 3)$ en arrondissant au millième.
 - Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des 10 parties.
 - Quel est le nombre moyen de parties perdues par le joueur?
 - On suppose que le joueur joue n parties identiques et indépendantes où $(n > 2)$. On note p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
 - Exprimer p_n en fonction de n .
 - Quel est le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que $p_n \geq 0,99$.

Exercice 16

La suite (u_n) est définie par $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{2}$ pour tout entier naturel n non nul.

La suite (v_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par $v_n = 3 - u_n$.

- Démontrer que (u_n) n'est pas une suite arithmétique ni géométrique.
- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
- Exprimer v_n en fonction de n .
- Préciser le sens de variation de (u_n) .
- La suite (u_n) est-elle convergente ?