TRAVAIL D'ÉTÉ OBLIGATOIRE EN MATHÉMATIQUES

Classe de 1reS - Passage en terminale **Année scolaire: 2016-2017**

Exercice 1

1) Soit $h(x)=(m+2)x^2-2mx+m-5$ où m est un paramètre réel ($m\neq -2$).

a) Déterminer m pour que $\dfrac{3}{2}$ soit racine de $h(x)$ puis déduire l'autre racine.

b) Déduire les racines du trinôme: $4x^2-4x-3$, puis dresser son tableau de signes.

2) Résoudre l'équation: $4|2x-3|^2-4|2x-3|-3=0$.

3) Déterminer le domaine de définition de la fonction k définie par: $k(x)=\sqrt{4\sin^2 2x-4\sin 2x-3}$.

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbf{R}$ puis dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation: $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos(2x)=0$.

2) Résoudre dans $\mathbf{R}$ puis dans l'intervalle $]0;2\pi]$ l'inéquation: $-2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1\geq 0$.

Exercice 3

Les parties **1** *et* **2** *sont indépendantes.*

1) On considère la suite (U_n) définie par: $U_0=10$, et pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1}=\frac{12U_n-6}{U_n+5}.$$

a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (U_n) approchées à 10^{-4} près:

n	1	2	5	6	11	12	14	16
U_n								

b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (U_n) et le comportement de (U_n) en $+\infty$.

2) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n=\dfrac{12n-6}{n+5}$.

a) Etudier les variations de la suite (V_n).

b) Trouver le plus petit indice "m" tel que , lorsque $n\geq m$, $V_n>11,999$.

Exercice 4

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}-\{-2;3\}$.On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}:\vec{j}\right)$. On donne le tableau suivant concernant f :

x	$-\infty$		-2		0		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	
Variations de f	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↘	$-\infty$

1) Déterminer les limites de f aux bornes ouvertes de son domaine de définition puis déduire les asymptotes verticales et horizontale de (C).

2) Sachant que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x+2=0$, déterminer l'équation de l'asymptote oblique (d) à (C) en $+\infty$.

3) Sachant que (d) coupe (C) en son point d'abscisse 7 et en respectant toutes les informations déjà données, tracer les asymptotes et une courbe possible de f.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par: $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{x^2-1}$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative.

1) Déterminer les limites de f aux bornes ouvertes de son domaine de définition D_f et interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Vérifier que $f(x)=x-2-\dfrac{2x}{x^2-1}$.

b) Démontrer que la droite $(d): y=x-2$ est une asymptote oblique à $\left(C_f\right)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Étudier la position de $\left(C_f\right)$ par rapport à (d).

3) a) Montrer que $f'(x)>0$ sur D_f puis dresser le tableau de variations de f.

b) Ecrire l'équation de la droite (T) tangente à $\left(C_f\right)$ en son point d'abscisse 2.

c) Déduire les coordonnées du point de tangence B où la tangente à $\left(C_f\right)$ est parallèle à (T).

d) Donner une approximation affine de $f\left(2-10^{-2}\right)$. Quelle est l'erreur commise.?

4) Soit g la fonction définie par: $g(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{|x+1|(1-x)}$ et $\left(C_g\right)$ sa courbe représentative.

Expliquer, sans faire aucune figure, comment déduire $\left(C_g\right)$ à partir de $\left(C_f\right)$.

Exercice 6

Soit, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la famille de courbes (C_m) d'équation:

$$x^2+y^2-2mx+2(m+1)y+m^2-2m-2=0 \text{ où m est un paramètre réel.}$$

1) Déterminer m pour que (C_m) soit un cercle.

2) Calculer m pour que le cercle (C_m) soit tangent à la droite (T) d'équation: $4x+3y+3=0$.

Dans la suite, on suppose que $m=1$, alors: $(C_1): x^2+y^2-2x+4y-3=0$.

3) Déterminer le centre I_1 et le rayon R_1 du cercle (C_1).

4) Déterminer l'équation de la droite (Δ) passant par $A(3;0)$ et tangente à (C_1).

5) a) Déterminer les équations des tangentes (T_1) et (T_2) au cercle (C_1) et perpendiculaires à la droite (Δ). (L'ordonnée à l'origine de (T_1) est la plus petite des deux).

b) Déduire les coordonnés du point de tangence B de (T_1) et (C_1).

Exercice 7

Les deux parties sont indépendantes:

Partie A

Pour savoir si une pièce est équilibrée, on la lance 200 fois.

On a obtenu 115 fois "Pile".

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de "Pile" apparu

On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

a) Déterminer n et p.

b) Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau ci-contre:

(Donner les résultats à 10^{-4} près par défaut)

c) Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des "Piles" apparus puis déduire si la pièce est équilibrée ou non.

k	$P(X \leq k)$
84	
85	0,0200
86	0,0279
87	0,0384
88	0,0518
89	
90	
111	
112	0,9615
113	0,9720
114	0,9799
115	0,9859
116	
117	

Partie B

Soit (U_n) et (V_n) deux suites numériques telles que:

- (V_n) est géométrique de raison 3 de premier terme $V_1=3$.
- $V_n=1-\dfrac{1}{U_n-1}$ avec $U_n \neq 1$ pour tout entier naturel n.

Soit les sommes $S_n=V_1+V_2+...+V_n$ et $T_n=\dfrac{1}{U_1-1}+\dfrac{1}{U_2-1}+...+\dfrac{1}{U_n-1}$.

Ecrire S_n puis déduire T_n en fonction de n.

Exercice 8

Les trois parties sont indépendantes:

1) On donne $M = \sin(2x) + \cos(2x)$ et $R = 1 - \cos(4x) + \sin(4x)$.

a) Montrer que $M = \sqrt{2}.\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ puis résoudre $\sin(2x) + \cos(2x) = 1$.

b) Montrer que $R = 4\sqrt{2}\sin(x).\cos(x).\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ puis résoudre $R = 0$.

2) Simplifier $\frac{\sin 4a}{\sin a}$ et en déduire la valeur de $\mathrm{R} = \cos\frac{\pi}{5} \times \cos\frac{2\pi}{5}$.

3) Soit $E = \sqrt{3}\cos x - \sin x$.

Ecrire E sous la forme $2\cos(x - \alpha)$ où α est un angle, exprimé en radians, de l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.

Exercice 9

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article.

Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut :

- S: "un défaut de soudure" avec une probabilité égale à 0,2.
- E: "un défaut sur un composant électronique" avec une probabilité égale à 0,15.

Le contrôle a montré aussi que: $P(S \cap E) = P(S) \times P(E)$.

Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1) Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à **0,32** .

2) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque article le nombre de défauts qu'il possède.

a) Montrer que $P(X = 1) = 0,29$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X et compléter le tableau ci dessous:

k_i	0	1	2
$P(X = k_i)$		0,29	

c) Calculer l'espérance mathématique de X .

3) Un commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.

Soit D la variable aléatoire qui indique le nombre d'articles défectueux.

a) Montrer que D suit une loi binomiale de paramètres n et p à déterminer.

b) Calculer l'espérance mathématique de D. Quel est le sens de ce nombre?

c) Calculer, à 10^{-3} près par excès, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

Exercice 10

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{9}{5}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = \frac{-2}{U_n - 3}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $1 < U_n < 2$.

Partie A

1) Calculer U_1 et U_2 puis compléter le tableau à l'aide de la calculatrice,

(on prendra des valeurs de la suite (U_n) arrondies à 10^{-4} près)

i	3	4	5	6	8	11	13	14	16	17
U_i										

d'après le tableau ci-dessus:

2) a) Conjecturer les variations de la suite (U_n).

b) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-(U_n - 1)(U_n - 2)}{U_n - 3}$ puis démontrer votre conjecture.

3) Conjecturer le comportement de la suite (U_n) à l'infini.

<u>Partie B</u>

1) Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n, par $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 1}$.

2) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme V_o.

3) a) Exprimer, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n puis déduire que $U_n = 1 + \dfrac{1}{1 + (2)^{n-2}}$.

b) Déduire que (U_n) est une suite convergente.

c) Trouver le plus petit indice "m" tel que , lorsque $n \geq m$, on a: $U_n \leq 1 + \dfrac{1}{1025}$.

<u>Exercice 11</u>

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points:

$A(2,0,0)$; $B(0,4,0)$; $C(1,1,2)$ et $D(0,0,1)$.

On désigne par (P) le plan déterminé par les points A, B et C.

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C puis déduire son aire.
2) Soit $\vec{n}\,(a\ ;\ b\ ;\ 1)$ un vecteur de l'espace, où a et b désignent deux nombres réels.

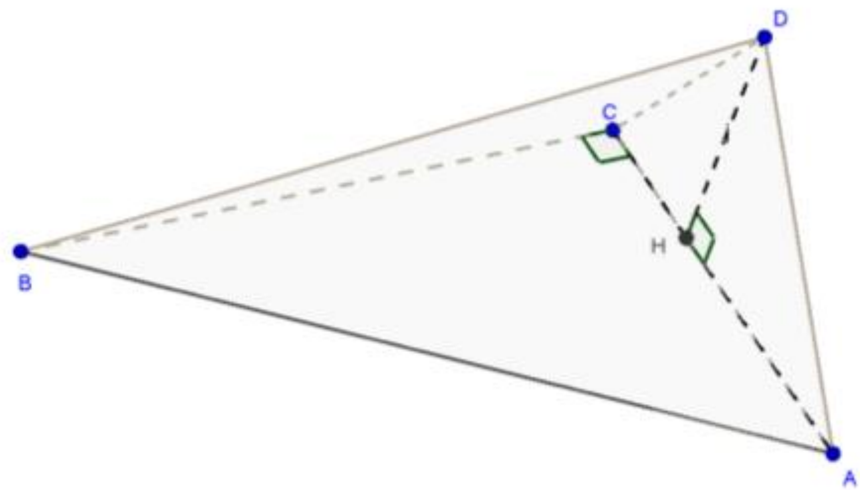
   a) Déterminer les valeurs de a et b telles que $\vec{n}$ soit un vecteur normal au plan (P).

   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $4x + 2y + z - 8 = 0$.

   c) Calculer la distance du point D au plan (P) puis déduire le volume du tétraèdre ABCD.
3) Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (P).

   a) Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite (DH) est: $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$.

   b) Déterminer les coordonnées du point H puis déduire qu'il appartient à la droite (AC).
4) Soit R le pied de la perpendiculaire issue de H sur la droite (AB)



a) Montrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (ACD).

b) Déduire que les deux plans (BCD) et (ACD) sont perpendiculaires.

c) Montrer que les droites (AB) et (DR) sont perpendiculaires.

d) Nommer, alors, et en justifiant, un angle des deux plans (ABC) et (ABD).

Exercice 12

Soit $f(x)=(m-2)x^2-2mx+2m-3$ où m est un paramètre réel ($m\neq 2$).
On note x' et x'' les racines de $f(x)$, lorsqu'elles existent.

1. Etudier le signe de $-4m^2+28m-24$.
2. Pour quelles valeurs de m, les racines x' et x'' existent-elles ?
3. Déterminer m pour que 4 soit racine de $f(x)$ et calculer l'autre racine.
4. Déterminer m, dans chacun des cas suivants :

   a) Les racines x' et x'' sont opposées. b) $\dfrac{1}{x'}+\dfrac{1}{x''}=+2$.

Exercice 13

1. **a)** Résoudre l'équation $2t^2+9t-5=0$.

   b) En déduire les solutions de l'équation $2|x-2|^2+9|x-2|-5=0$.

2. Résoudre les inéquations suivantes :

   a) $\dfrac{2x^2-5x+3}{-x^2-4x-3}\geq 0$. b) $-y^2+5|y|-4\leq 0$.

3. Soit $E=\dfrac{2x^2-5x+3}{-3x^2-x+4}$. Simplifier E.

Exercice 14

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]0;2\pi]$, l'équation: $cox\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin(x)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi;\pi]$, l'inéquation: $\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leq\dfrac{1}{2}$.

3) En utilisant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x)=x^{2015}$, montrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^{2015}-1}{h}=2015$.

Exercice 15

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,on donne le point $S(-3;4)$ et le cercle (C) d'équation: $x^2+y^2-2x-4y+1=0$.

1) Déterminer les coordonnées du centre I et le rayon R de (C).
2) Montrer que le point S est à l'extérieur du cercle (C).
3) Montrer que le cercle (C') de diamètre $[IS]$ a pour équation: $x^2+y^2+2x-6y+5=0$.
4) Calculer les coordonnées des points A et B intersection des deux cercles (C) et (C').
5) Déterminer les équations des droites (T_1) et (T_2) tangentes à (C) et passant par le point S.

Exercice 16

On considère dans un repère orthonormé la famille de courbes (C_m) d'équation :
$x^2 + y^2 - 2(2m + 1)x + 2(m - 3)y + 5 - 2m = 0$.

1) Démontrer que, quelque soit m, (C_m) est un cercle de centre I_m (2m+1 ; -m+3) dont on déterminera le rayon R_m.
2) Déterminer l'ensemble des centres I_m.
3) Montrer que les points E (0 ; 1) et F (2 ; 5) appartiennent à (C_m) et **retrouver** l'ensemble des centres I_m.
4) Trouver l'ensemble des valeurs de m tel que (C_m) coupe (x'Ox) en deux points distincts.
5) Soit A (2 ; -5). Montrer que A est un point à l'extérieur du cercle **(C_1)** et trouver les équations des tangentes menées de A à **(C_1)**.
6) Calculer l'angle aigu (arrondi au degré) de ces deux tangentes.
7) Trouver les équations des tangentes à **(C_1)** qui sont parallèles à la droite (D) d'équation x-y+1 =0.

Exercice 17

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère :
les deux points $A(0\,;4\,;1)$ et $B(2\,;-1\,;-2)$, le vecteur $\vec{u}(1;-1;-1)$ et la droite (Δ)
de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2m+7 \\ y = -m-1 \\ z = 3m+4 \end{cases}$ où m est un paramètre réel.

1. Soit (d) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
- **a.** Démontrer que les droites (d) et (Δ) sont orthogonales.
- **b.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite(d).

2. Soit $(P\ )$ le plan qui passe par le point A et perpendiculaire à la droite (Δ).
- **a.** Démontrer que le plan (P) a pour équation : $2x - y + 3z + 1 = 0$.
- **b.** Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan(P).
- **c.** Démontrer que la droite (d) est incluse dans le plan (P).
- **d.** Déduire que les droites (d) $\mathrm{et}(\Delta)$ sont sécantes.

3. Soit $(P_1\ )$ le plan d'équation : $x + z + 1 = 0$.
- **a.** Montrer que les plans(P) et $(P_1\ )$ sont sécants.
- **b.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite(d_1) intersection des plans $(P\ )$ et $(P_1\ )$.

Exercice 18

Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$. On note (**G**) son graphe dans un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. **a.** Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans R comprise entre $1.67 et$ 1.68.
   b. En déduire le signe de g sur R.
2. La droite d'équation $y = 12x - 21$ est- elle une tangente à (**G**) ?
   Si oui préciser en quels points.
3. **a.** Vérifier que $1 + x^3 = (1 + x)(x^2 - x + 1)$.
   b. En déduire que $1 + x^3 = 0$ admet une solution et une seule sur R.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\ \ [$ par $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$; on note (**C**) son graphe.
   a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Déduire les équations des asymptotes.
5. **a**. Démontrer que $f\ (x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$
   b. En déduire le tableau de variation de f.(on donnera une valeur approchée de f(α) à 10^{-2}).

Exercice 19

Une urne contient 7 boules noires et 3 boules blanches. Les boules sont indiscernables.

Une partie consiste à tirer au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne.

On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes;
  on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

1. Un joueur joue une partie. On note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   a. Montrer que $p(Y = -1) = 0{,}49$.
   b. Établir la loi de probabilité de Y.
2. Un joueur joue 10 parties identiques et indépendantes.
   On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de parties gagnées par le joueur.
   a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}42$.
   b. Calculer $p\ (X = 0)$, $p(X \geq 3)$ en arrondissant au millième.
   c. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des 10 parties.
   d. Quel est le nombre moyen de parties perdues par le joueur?
3. On suppose que le joueur joue n parties identiques et indépendantes où ($n > 2$).
   On note p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
   a. Exprimer p_n en fonction de n.
   b. Quel est le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que $p_n \geq 0{,}99$.

Exercice 20

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ et $g(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

On note (F) et (G) leurs courbes respectives dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$ d'unités 2cm.

1. Déterminer le domaine de définition de f et celui de g **.**
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f.

Que peut-on en déduire ?

3. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur D_f.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Étudier les variations de g sur son domaine de définition D_g et dresser le tableau de variation de g.

6. **a)** Déterminer les points A et E de (F) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$.$(x_A > x_E)$

b) Démontrer que la droite (T_A) d'équation $y = 4x + 2$ est tangente à (F) et (G) en A.

7. **a)** Donner une équation de la tangente (T_B) au point B de (F) d'abscisse 2.

b) Vérifier que (T_A) et (T_B) se coupent au point $C\left(\frac{-2}{5}, \frac{2}{5}\right)$

c) Calculer, à un degré près par défaut, l'angle $\widehat{ACB}$.

8. **a)** Démontrer que le triangle CAB est isocèle.

b) Calculer, en cm^2, l'aire de CAB.

9. **a)** Montrer que $f(x) - g(x) = \dfrac{(x+1)^3(2-x)}{x+2}$

b) Étudier les positions relatives de (F) et (G).

10. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tracer (T_A), (T_B) et, avec des couleurs différentes, les courbes (F) et (G).

Exercice 21

La suite (u_n) est définie par $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{2}$ pour tout entier naturel n non nul.

La suite (v_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par $v_n = 3 - u_n$.

1. Démontrer que (u_n) n'est pas une suite arithmétique ni géométrique.

2. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

3. Exprimer v_n en fonction de n**.**

4. Préciser le sens de variation de (u_n).

5. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 22

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel *n,* par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}$.

On suppose que, pour tout entier naturel *n,* $u_n > 0$.

1) **a)** A l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ?

b) Démontrer cette conjecture.

2) Soit (a_n) la suite définie, pour tout entier naturel *n*, par $a_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Montrer que (a_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b)Vérifier que $u_n = \dfrac{2}{4n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) A partir de quel rang n_0 a-t-on, pour tout $n \geq n_0$, $0 < u_n < 10^{-2}$? Donner u_{n_0} .