TRAVAIL D'ÉTÉ OBLIGATOIRE EN MATHÉMATIQUES

Classe de Seconde **Année scolaire : 2016-2017**

Exercice 1

Les quatre parties sont indépendantes

I) Résoudre dans **R**: 1) $\sqrt{(4-3x)^2}=|x+1|$ **;** 2) $|3x-1|<3-\pi$ **;** 3) $2(3-2x)^2(x+1)\leq 0$.

4) $|5x-4|=2$; 5) $\dfrac{1}{|x+1|}\geq -2$; 6) $|3x+2|<2|x-1|$

II) Déterminer le domaine de définition de :

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{|3x-2|-3}$ b) $g(x)=\dfrac{\sqrt{9-2x}}{3(x-4)}-\sqrt{x-1}$

III) On donne la fonction *f* définie sur **R** par: $f(x)=3|2x+3|-4x-3$.

Ecrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue puis résoudre algébriquement l'inéquation $f(x)<3$.

IV) On donne les fonctions f et g définie par: $f(x)=4x^3+4x^2-15$ et $g(x)=4x^2+x-15$.

Etudier la position relative de la courbe (C_f) représentative de la fonction f et de la courbe (C_g) représentative de la fonction g.

Exercice 2

(Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles).

Une étude statistique portant sur les fumeurs dans un échantillon de 2 000 personnes de la population française a abouti aux résultats suivants:

- 740 femmes ne fument pas;
- 400 hommes fument;
- 700 personnes sont des fumeurs.

1) Reproduire et compléter le tableau à double entrée ci-dessous:

	Femme $\overline{\text{H}}$	Homme H	Total
Fumeur F			
Non fumeur $\overline{\text{F}}$			
Total			**2 000**

2) On interroge une personne au hasard.

a) Calculer la probabilité qu'elle soit un homme non fumeur.

b) Calculer la probabilité qu'elle soit une femme ou qu'elle ne fume pas.

3) On interroge un fumeur au hasard, calculer la probabilité qu'il soit un homme.

4) On choisit au hasard deux personne parmi les 2000 fumeurs.
Quelle est la probabilité qu'ils soient des hommes ?

Exercice 3

Une urne contient n+5 boules numérotées.
3 Rouges : R_1, R_2, R_3.
2 Noires : N_1, N_2.
n vertes : V_1, V_2,….., V_n.
On suppose que n est un naturel pair. On extrait au hasard, successivement, sans remise deux boules.
Exprimer la probabilité des événements suivants :

a) A : « une et une seule est rouge »
b) B : « au moins une est verte »
c) C : « les deux boules portent chacune un numéro pair »

Exercice 4

Les 6 parties sont indépendantes.

1) a) Sur un cercle trigonométrique de centre O, placer le point M associé à $\frac{-32\pi}{3}$.

b) Calculer le nombre de $[-4\pi ;-3\pi]$ associé au point M_1 symétrique de M par rapport à $(x'x)$.

2) Sachant que $a \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\tan a = -\frac{1}{3}$, calculer les valeurs exactes de $\sin a$ et $\cos a$ et $\cos\left(\frac{23\pi}{2}+a\right)$.

3) Pour $x = -\frac{5\pi}{6}$ calculer: $\sin\left(\frac{23\pi}{2}+x\right)$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{2}+2x\right)$.

4) Calculer la valeur exacte de chacune des expressions ci-dessous:

$$M = \sin\left(\frac{13\pi}{2}-a\right)+\cos(-21\pi-a)+\tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad N = \sin^2 67^0 + \cos^2 113^0$$

5) Calculer $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$ puis déduire que: $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=0$.

6) Calculer les valeurs exactes de chacune des expressions ci-dessous:

$$M = \sin\left(\frac{17\pi}{2}-a\right)+\cos(-15\pi-a)+\sin^2 23^0+\sin^2 113^0 \quad \text{et} \quad N = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\times\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times\tan\left(\frac{13\pi}{3}\right).$$

Exercice 5

On donne D un polynôme défini par: $D(x)=(m+2)x^2-(5m-1)x-m$, où m est un réel..

1) Déterminer m pour que $-\dfrac{1}{5}$ soit une racine de D.

Pour le reste de l'exercice, on suppose $m=3$.

2) Montrer que $D(x)$ s'écrit sous la forme $D(x)=(x-3)(ax+b)$ où ***a*** et ***b*** sont des entiers naturels à calculer en utilisant la méthode d'identification.

3) On donne $Q(x)=\dfrac{5x^3-14x^2-3x}{(5x+1)^2}$ et $g(x)=\dfrac{x(x-3)}{|5x+1|}$.

a) Pour quelles valeurs de x, $Q(x)$ est-elle définie?

b) Montrer que $Q(x)=\dfrac{x(x-3)}{5x+1}$ puis résoudre $Q(x)\leq 0$.

c) Ecrire $g(x)$ en fonction de $Q(x)$ sans valeur absolue.

Exercice 6

ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de $[CD]$.

M et N sont deux points définis par: $2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{0}$.

1) a) Déterminer dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ les coordonnées de tous les points de la figure.

b) Déduire que les points M, C et N sont alignés et que les droites (BI) et (MN) sont parallèles.

2) a) Montrer que le point I est le centre de gravité du triangle AMN.

b) O est un point du plan défini par: $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}$.

Montrer que les points B, O et I sont alignés.

3) $[BI)$ coupe $[AN]$ en S. Déterminer les coordonnées de S.

Exercice 7

1) On donne le polynôme $P(x)=2x^3-9x^2+4x+15$.

Résoudre l'inéquation $P(x)<0$.

2) Déduire le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{(x+7)(2x-5)}{\sqrt{-P(x)}}$.

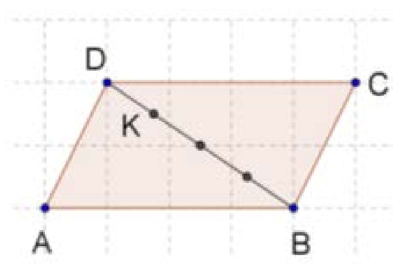
3) Résoudre l'équation $f(x)=0$

Exercice 8

ABCD est un parallélogramme de centre ***O***.

K est un point de $[DB]$ comme l'indique la figure ci-contre :

E est un point défini par: $3\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{EB}$.



1) a) Montrer que $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ puis déduire que: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

b) Ecrire $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ puis déduire que les points A, K et E sont alignés.

2) F est le symétrique du point A par rapport au point B.
Que représente le point C pour le triangle AEF ? Justifier.

Exercice 9

On donne la fonction polynôme du second degré g définie sur $[-5;7]$ par:

$g(x)=-\frac{1}{3}(x+a)^2+3$ avec $a\in R$ et (P) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) Déterminer les valeurs de a pour que (P) coupe l'axe $(y'y)$ au point A d'ordonnée $\frac{8}{3}$.

Dans la suite de l'exercice on suppose $a=-1$.

1) a) Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole (P).

b) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.

c) Encadrer, par le calcul, $g(x)$ dans chacun des cas suivants:

i) $3<x<5$ ii) $-3\leq x\leq 3$

3) Ecrire la forme factorisée de g puis déduire les coordonnées des points M et N intersections de (P) avec l'axe $(x'x)$. (On prend $x_M<x_N$).

4) Tracer **soigneusement** (P).

5) Soit la droite (d) d'équation: $y=4-x$.

a) Tracer (d) sur la même figure que la parabole (P) sur $[-5;7]$.

b) Montrer, par le calcul, que la droite (d) coupe la parabole (P) en S et N.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x)>4-x$.

Exercice 10 (à l'aide de la calculatrice)

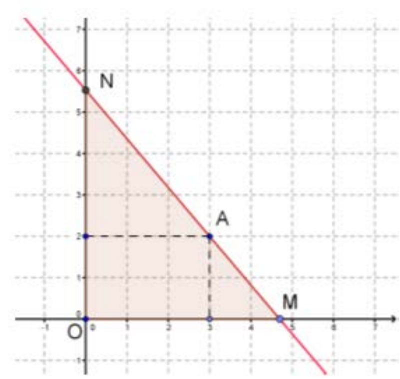
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]3;21]$ par $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$.

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, On donne le point $A(3;2)$.

M est un point de coordonnées $(x,0)$ avec $x>3$.

La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en N.

Exprimer l'aire du triangle OMN en fonction de x,
puis déduire la position exacte de M pour laquelle l'aire du triangle OMN est minimale.



Exercice 11

ABCD est un carré de côté 1 ,
I et J sont deux points des segments $[AB]$ et $[AD]$
respectivement tels que: $AI = DJ = a$ avec $a \in \left]0\,;1\right[$
comme l'indique la figure ci-contre.
K est le quatrième sommet du rectangle AIKJ.

1) Dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$,

a- Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.
b- Déterminer, en fonction de a, les coordonnées des points I, J et *K*.

2) Démontrer que les droites (CK) et (IJ) sont perpendiculaires.

Exercice 12

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses? Justifier votre réponse.

1) Si A,B et C sont trois points alignés avec $AB = 5$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2$ alors on a: $AC = \frac{3}{2}$.

2) Si $\left\|\vec{u}\right\| = 2$, $\left\|\vec{v}\right\| = 5$ et $\left\|\vec{u} - 2\vec{v}\right\| = \sqrt{30}$ alors l'angle des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aigu.

3) Si $a > 5$ alors $a^2 > 20$.

4) $(d_1): \begin{cases} x = -5t_1 - 2 \\ y = 2t_1 + 1 \end{cases}$; $t_1 \in R$ et $(d_2): \begin{cases} x = 10t_2 + 1 \\ y = -4t_2 + 2 \end{cases}$, $t_2 \in R$ sont deux droites confondues.

5) Si A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,45$ et $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,4$ alors

$P(A \cap B) = 0,25$.

Exercice 13

Un sac contient des billes indiscernables au toucher.
Il y a 10 billes roses, 7 billes vertes et *n* billes jaunes.

1)On tire au hasard une bille du sac.
La probabilité de l'évènement A : « tirer une bille qui n'est pas verte » est 0,72
Calculer le nombre *n* de billes jaunes dans le sac.

2) Dans cette question, *n* = 8.
On tire au hasard une deuxième bille du sac **sans avoir remis** la première bille tirée.
On note : R_1 l'évènement « la 1re bille tirée est rose »,
J_2 l'évènement « la 2e bille tirée est jaune ».
a) Montrer que $p(R_1) = 0,4$ et $p(J_2) = 0,32$.
b) Décrire l'événement $R_1 \cup J_2$ par une phrase puis calculer $p(R_1 \cup J_2)$.

Exercice 14

On donne, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A(–4, –1), B(4, 8) et C(10, 6).

1) Calculer l'angle $\hat{C}$ du triangle ABC.

2) **a -** Vérifier que le système $\begin{cases} x = 2t + 10 \\ y = t + 6 \end{cases}$, où *t* est un paramètre réel, représente la droite (AC).

b - En déduire une équation cartésienne de la droite (AC).

3) Donner une équation de la médiatrice (Δ) de [BC].

4) Déterminer, en justifiant, les coordonnées du point H projeté orthogonal de B sur (AC) puis déduire les coordonnées du point K symétriques du point B par rapport à (AC).

Exercice 15

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,

on donne les points $A(4;1)$ et $B(-2;-3)$ et la droite (Δ) d'équation: $3x+2y-1=0$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) puis déduire les coordonnées du point d'intersection de (AB) avec l'axe des ordonnées.

2) Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont perpendiculaires.

3) Déterminer les coordonnées du point I intersection de (AB) et (Δ).

4) Que représente la droite (Δ) pour le segment $[AB]$?

Exercice 16

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [BF].

1) Faire une figure.

2) Expliquer pourquoi les droites (EI) et (AB) sont sécantes.

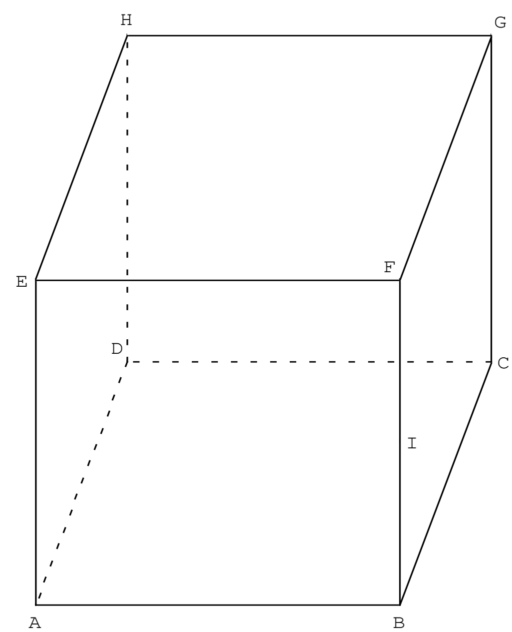
On note K leur point d'intersection.

3) Démontrer que (BC) est parallèle au plan (EHI).

4) Déterminer, en justifiant, la droite (Δ), intersection des plans (EHI) et (ABC).

5) (HI) coupe le plan (ABCD) en L.

Démontrer que les points B, D, L sont alignés.



Exercice 17

Dans cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats au millième le plus poche.

En Juin 2015, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 25% de la population est atteinte par un virus. $(p=0,25)$

Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante.

Pour s'en assurer, on se propose d'étudier un échantillon de 900 personnes choisies au hasard dans cette île dans lequel on dénombre 177 personnes atteintes par le virus.

1) Déterminer la fréquence observée des personnes atteintes par le virus.

2) a) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% lié à la proportion *p* des personnes atteintes par le virus.

b) Quelle conclusion peut-on tirer de cette observation à propos du chiffre de 25% publié par l'institut de veille sanitaire? Justifier.

Exercice 18

Les trois parties sont indépendantes

Partie A

Répondre par vrai ou faux, **en justifiant**.

1) La droite $(d): 3x-2y+7=0$ admet le vecteur $\overrightarrow{V}(2,3)$ comme vecteur normal.

2) Les deux droites $(d_1): 3x-5y+1=0$ et $(d_2): \begin{cases} x=10t-1 \\ y=-6t+5 \end{cases}$ $avec\, t \in R$, sont parallèles.

Partie B

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on donne les points: $A(2,-3)$, $B(1,5)$ et $C(-5,-1)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
2) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur relative à [BC]
3) Déduire les coordonnées du point H projeté orthogonale de A sur (BC).

Partie C

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne la famille des droites (d_m) d'équation:

$$(m-1)x-(m-2)y+3=0 \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1) Quelle est parmi les droites (d_m) celle qui est perpendiculaire à $x'Ox$?
2) Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles (d_m)

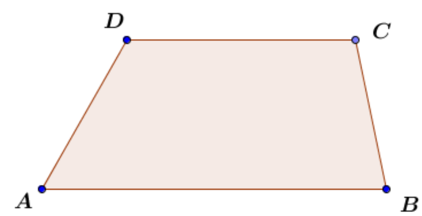
   a) est parallèle à la droite $(\Delta): \begin{cases} x=-3t+1 \\ y=t-3 \end{cases}$; $t \in IR$.

   b)soit strictement croissante.

Exercice 19

ABCD est un trapèze tel que:

$AB=6\text{cm}$, $AD=3\text{cm}$, $CD=4cm$ et $BD=3\sqrt{3}\text{ cm}$.



1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ puis déduire que $\widehat{BAD}=60^0$.

   b) Reproduire et compléter la figure au fur et à mesure.

2) Montrer que $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ puis déduire que $AC=\sqrt{37}$ cm.

3) Soit A' le symétrique de A par rapport au point D. Calculer CA'.

4) Soit H le projeté orthogonale de C sur (AA'). Calculer DH.

Exercice 20

$SABCD$ est une pyramide de sommet S et de base le parallélogramme $ABCD$.

I est le milieu de $[AD]$.

M, N et J sont les points définis par: $\overrightarrow{SM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{SJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SA}$.

1) Faire une figure et compléter la au fur et à mesure.

2) Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (AD).

3) a) Montrer que (AM) et (DN) se coupent en un point P.

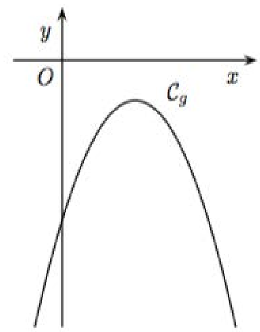
b) Montrer que (SP) est l'intersection des deux plans (SAB) et (SDC).

c) Que peut-on en déduire de la direction de (SP) ?

4) Montrer que le plan (IJN) coupe le segment $[DC]$ en son milieu K.

5) Déterminer la section du plan (IJN) avec la pyramide S**ABCD.**

Exercice 21



Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Dans le repère ci-contre est représentée une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad$ (a, b et c sont des nombres réels et a est non nul).
Donner, en justifiant, le signe de a, b et c.

Partie B

f est une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$, admettant un maximum au point $S(-4; 2)$ et passant par le point $B(-1; 0)$. Donner, en justifiant, l'expression de f.

Exercice 22

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -x^2 - 4x - 2$

1) Dresser le tableau de variations de h et déterminer l'équation de l'axe de symétrie de sa parabole représentative.
2) Calculer f (-2) puis en déduire les antécédents de 18 par h.
3) Sans effecteur de calcul, comparer $h(-\sqrt{2})$ et $h(-\sqrt{3})$.
4) Déterminer la forme canonique de f.
5) Encadrer $f(x)$ si $-4 < x < 3$.

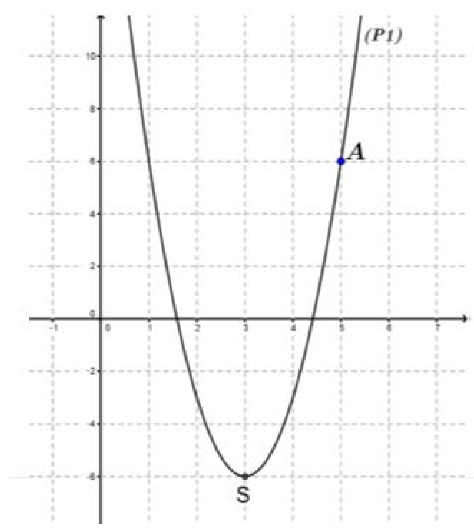
Exercice 23

Partie A

La parabole (P_1) tracée ci-contre représente une fonction g définie par:

$g(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Déterminer α, β puis montrer que $a = 3$.



Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par: $f(x)=-x^2+6x+1$ et (P_2) sa parabole représentative.

1) Déterminer les coordonnés du sommet R de (P_2).

2) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation sur l'intervalle $[-1;7]$.

3) a) Montrer que f s'écrit sous la forme: $f(x)=-(x-3)^2+10$.

b) Encadrer $f(x)$, par le calcul, si $-1<x<2$.

c) Déterminer l'intervalle contenant x si $1\leq f(x)\leq 6$.

4) a) Compléter le tableau suivant:

x	0	1	2	4	5	6
$f(x)$						

b) Tracer, sur la même figure de la page annexe, la parabole (P_2) sur $[-1;7]$.

Partie C

1) Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de (P_1) et (P_2)

2) Déduire graphiquement les solutions de l'inéquation: $f(x)>g(x)$

Exercice 24

On donne une fonction polynôme du second degré f et (P) sa parabole représentative dans un repère orthonormé avec :

- $f(-2)=-12$
- A (1 ; -3) est un point de (P).
- Les antécédents de 4 par f sont -6 et 2.

1) Déterminer l'axe de symétrie (d) de (P).
2) Déterminer les coordonnées du sommet S de (P).
3) Déterminer les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à (d).
4) Déterminer $f(x)$.

Exercice 25

1) On donne le polynôme $P(x)=2x^3-9x^2+4x+15$.
Résoudre l'inéquation $P(x)<0$.

2) Déduire le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{(x+7)(2x-5)}{\sqrt{-P(x)}}$.

3) Résoudre l'équation $f(x)=0$