

Programme Noyau - MATHÉMATIQUES

Nombres et calcul :

○ **Les nombres réels**

- Connaître les différents ensembles des nombres réels.
- Reconnaître un entier, un décimal, un rationnel, un irrationnel et un réel.
- Reconnaître une fraction décimale.

○ **La racine carrée :**

- Résoudre les équations de la forme $x^2 = a$
- Additionner, soustraire, multiplier et diviser des radicaux.
- Rendre rationnel le dénominateur d'une écriture fractionnaire (notion de conjugué).
- Comparer des nombres avec des radicaux.

○ **Le calcul algébrique :**

- Développer et factoriser une expression littérale.
- Connaître la notion de polynôme et le vocabulaire correspondant (racine, zéro, polynômes identiques, polynôme identiquement nul)
- Réduire, additionner et soustraire des polynômes.
- Définir et simplifier une expression fractionnaire.
- Résoudre une équation se ramenant au premier degré.
- Résoudre une équation produit nul.
- Résoudre des inéquations du premier degré et représenter sur un axe l'ensemble solution.
- Résoudre un système d'équations par substitution, combinaison ou comparaison.
- Résoudre un problème se ramenant à une résolution d'équation ou d'un système d'équations.

○ **Les puissances :**

- Effectuer des calculs en appliquant les propriétés sur les puissances.
- Écrire un nombre décimal sous la forme $a \times 10^n$.
- Donner la notation scientifique d'un nombre décimal.

Fonctions, Organisation et gestion de données :

○ **La proportionnalité**

- Reconnaître un tableau de proportionnalité.
- Calculer une quatrième proportionnelle.
- Effectuer des calculs d'échelle.
- Calculer, utiliser un pourcentage.
- Déterminer le pourcentage relatif à un caractère dans un groupe constitué de la réunion de deux groupes.
- Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire.
- Utiliser le lien entre pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur.
- Résoudre des problèmes en utilisant la proportionnalité.

○ Les fonctions

- Utiliser les notations et le vocabulaire fonctionnels (image, antécédent).
- Passer d'un mode de représentation d'une fonction à un autre (tableau, formule, représentation graphique).
- Déterminer, à partir de tous les modes de représentation, l'image d'un nombre.
- Déterminer un antécédent à partir d'une représentation graphique ou d'un tableau de valeurs d'une fonction.
- Déterminer de manière algébrique l'antécédent par une fonction, dans des cas se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré.
- Représenter graphiquement une fonction linéaire, une fonction affine.
- Interpréter les paramètres d'une fonction affine suivant l'allure de sa courbe représentative.
- Modéliser un phénomène continu par une fonction.
- Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire.
- Déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine d'une droite par calcul ou d'après le graphique.
- Caractériser l'appartenance d'un point à une droite à partir de ses coordonnées.
- Déterminer l'expression d'une fonction affine à partir de deux nombres et leurs images ou à partir de la droite qui la représente dans un repère.

Géométrie :

○ Le théorème de Thalès

- Appliquer le théorème de Thalès pour déterminer des rapports égaux et calculer des longueurs.
- Appliquer la réciproque du théorème de Thalès pour montrer que deux droites sont parallèles.
- Montrer qu'un triangle est l'agrandissement ou la réduction d'un autre triangle.
- Calculer le rapport d'agrandissement ou de réduction.
- Utiliser le rapport d'agrandissement ou de réduction pour calculer le périmètre ou l'aire d'un triangle.

○ Le trapèze

- Montrer qu'un quadrilatère est un trapèze
- Utiliser les propriétés des trapèzes et des trapèzes particuliers (rectangle ou isocèle).
- Reconnaître les bases, la hauteur et la base moyenne d'un trapèze.
- Utiliser les théorèmes des milieux dans un trapèze.
- Calculer l'aire d'un trapèze.

○ Droites et cercles

- Étudier la position d'une droite et d'un cercle à partir de la distance du centre du cercle à la droite.
- Utiliser la propriété des deux tangentes à un cercle issues d'un même point à l'extérieur de ce cercle.

○ Trigonométrie

- Utiliser le sinus ou le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle pour calculer la longueur d'un côté ou la mesure d'un angle.

○ Vecteurs

- Construire l'image d'un point par la translation d'un vecteur donné.
- Utiliser la règle de Chasles pour écrire des égalités vectorielles.
- Utiliser la règle du parallélogramme pour écrire des égalités vectorielles.
- Montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme à partir d'égalités vectorielles.
- Montrer qu'un point est milieu d'un segment à partir d'égalités vectorielles.

Géométrie analytique :

- Lire les coordonnées d'un point dans un repère.
- Placer un point dans un repère connaissant ses coordonnées.
- Déterminer l'équation d'une droite connaissant sa pente et les coordonnées de l'un de ses points.
- Déterminer l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées.
- Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Calculer la distance entre deux points.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées de l'origine ou de l'extrémité d'un vecteur.
- Calculer la pente d'une droite.
- Montrer que deux droites sont parallèles ou perpendiculaires.
- Montrer l'alignement de trois points.
- Calculer les coordonnées de point d'intersection de deux droites connaissant leurs équations respectives.

Travail facultatif

Exercice 1 :

a. Simplifier chacune des écritures suivantes :

$A = 3\sqrt{27} - 10\sqrt{75} + 8\sqrt{3}$	$B = -7\sqrt{72} + \sqrt{200} + 6\sqrt{32}$	$C = (2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})^2$
--	---	---------------------------------

b. Écrire sous la forme d'un seul quotient de dénominateur rationnel

$D = \frac{-2}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{45}}$	$E = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$	$F = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$
---	--	--

c. Dans chacun des cas suivants, comparer les nombres x et y en justifiant :

$x = -3\sqrt{5}$	et	$y = -7$
$x = 7 - \sqrt{3}$	et	$y = \sqrt{27}$
$x = 2\sqrt{3} - \sqrt{13}$	et	$y = \sqrt{10} - 3$

Exercice 2 :

a. Donner l'écriture décimale de

$$A = \frac{3^{-9} \times (10^3)^2}{2^{-1} \times 10^5 \times 3^{-10}}$$

b. Écrire chacun des nombres ci-dessous à l'aide de sa notation scientifique :

$$B = 25 \times 10^{15} + 3200 \times 10^{13}$$

$$C = \frac{6^5 \times 14^2 \times 10^{-7}}{3^4 \times 10^7 \times 7^2 \times 16}$$

$$D = \frac{25 \times 10^{-3} \times 3,6 \times (10^2)^{-5}}{12 \times 10^{-2} \times 1,5}$$

$$E = 12,5 \times 10^{-18} + 5,4 \times 10^{-19} - 10^{-17}$$

c. Écrire le nombre ci-dessous sous la forme d'une fraction irréductible

$$F = 4^0 \times \left(\frac{1}{5} - \left(\frac{5}{2} \right)^{-2} \right)$$

Exercice 3 :

On considère les trois nombres suivants A, B et C tels que :

$$A = \frac{8}{3} + 5 \div \left(1 - \frac{2}{5}\right) \quad ; \quad B = \sqrt{2 - \frac{6}{5}} \times \sqrt{2 + \frac{6}{5}} \quad ; \quad C = \frac{2\sqrt{75} - \sqrt{48}}{5\sqrt{2} \times \sqrt{54} - 5\sqrt{27}}$$

1. Montrer que A est un entier naturel.
2. Ecrire B sous forme d'une fraction irréductible.
3. Montrer que C est un nombre décimal.
4. Prouver que $B + C = 2$.

Exercice 4 :

On considère le polynôme $P(x) = (-3x - 5)^2 - 4x(3x + 5) + (1 - 2x)(3x + 5)$.

1. Factoriser $P(x)$.
2. Développer, réduire et ordonner $P(x)$.
3. Résoudre les équations suivantes :
 - a. $P(x) = 0$
 - b. $P(x) = 30$.
 - c. $P(x) = -9x^2$
 - d. $P(x) = 3x - 6$

Exercice 5 :

On donne $A(x) = 2(2x - 3)(x - 4) - (18 - 8x^2) - 2(3 - 2x)^2$.

1. Factoriser $A(x)$
2. Soit $B(x) = 2x^2 - 10x - 28$.
 - a. Vérifier que $B(x) = 2(x + 2)(x - 7)$.
 - b. Résoudre l'équation $B(x) = 0$.
3. Soit $P(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.
 - a. Pour quelles valeurs de x, $P(x)$ est-elle définie ?
 - b. Réduire $P(x)$ puis, résoudre $P(x) = 0$.
 - c. L'équation $P(x) = \frac{7}{9}$ a-t-elle une solution ? Justifier.

Exercice 6 : Les deux parties suivantes sont indépendantes.

- On donne $P(x) = ax^2 - 4(x + 5)$. Calculer a pour que -2 soit racine de $P(x)$.
- Quels sont les entiers naturels solutions de l'inéquation ci-dessous ?

$$\frac{4x}{5} - \frac{5x - 18}{10} > \frac{3 + 2x}{4} - \frac{1}{20}$$

Exercice 7 :

- Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants :

a.
$$\begin{cases} 5x + 7y = 8 \\ 10x + 21y = 24 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 4x + y = 12 \\ -3x + 6y = 7 \end{cases}$$

- La somme de deux nombres est 158.

Si on ajoute 25 à chacun d'eux, alors l'un devient le triple de l'autre.

- Représenter la situation par un système de deux équations à deux inconnues.
- Résoudre le système pour déterminer ces deux nombres.

Exercice 8 :

- f est la fonction affine telle que $f(2) = 3$ et $f(-2) = -5$.
Déterminer l'expression de $f(x)$.
- (d) est la droite qui représente la fonction affine $g(x) = -x - 5$. Tracer (d) dans un repère d'axes $(x' \hat{O} x ; y' \hat{O} y)$.
- A est le point d'intersection de (d) avec $(x' \hat{O} x)$. Calculer les coordonnées de A .
- B est le point d'intersection de (d) avec $(y' \hat{O} y)$. Calculer les coordonnées de B .
- (d') est la droite qui représente f dans le même repère.
Soit C le point d'intersection de (d) et (d') . Calculer les coordonnées de C .
- E est un point de (d) d'abscisse 100, quelle est son ordonnée ?
- F est un point de (d) d'ordonnée 100, quelle est son abscisse ?

Exercice 9 :

On donne les fonctions $f(x) = 4x$; $g(x) = -2x + 3$ et $h(x) = 3$

- Représenter f ; g et h dans un repère orthonormé.
- Déterminer, par lecture graphique :
 - l'image de -2 par la fonction g .
 - l'antécédent de 5 par la fonction f .
 - la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
 - les solutions de l'inéquation $g(x) \leq 3$.

Exercice 10 :

Dans un repère orthonormé d'origine O , on considère le vecteur $\vec{u}(-2; 3)$

1. Soient les points $A\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
2. Soit $C\left(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Montrer que $AB = AC$.
3. D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
 - a. Calculer les coordonnées de D .
 - b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier la réponse.

Exercice 11 :

Dans la figure ci-contre,

(C) est un cercle de centre O et de diamètre $BE = 6$

A est un point de (BE) tel que $OA = 5$

(AF) est une tangente à (C) en F

La tangente en E à (C) coupe (AF) en N

(NE) et (OF) se coupent en I .

1. Construire la figure
2.
 - a. Montrer que O est l'orthocentre du triangle NAI .
 - b. En déduire que (NO) est perpendiculaire à (AI) .
3.
 - a. Vérifier que (NO) est la médiatrice de $[EF]$.
 - b. En déduire que (EF) est parallèle à (AI) .
4. Montrer que $OI = 5$.
5. Montrer que les quatre points A, F, E et I sont cocycliques sur un même cercle (C') de diamètre à déterminer.
6. Calculer la longueur AF .
7. Calculer le rayon du cercle (C') .